

4. cvičení - Řady 1

Příklad 1. Určete, zda následující řady konvergují:

- | | |
|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$ | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2}$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^n$ |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$ |
| (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ |
| (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^k}{7} \right)^k$ | (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)}$ |
| (g) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\log k}$ | |

Příklad 2. Vyřešte konvergenci následujících řad pro $x \in \mathbb{R}$:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
- (b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$

Příklad 3 (Bonus). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní řady. Rozhodněte, zda musí platit:

- | | |
|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ je konvergentní. | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - c_n)$ je konvergentní. |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$ je divergentní. | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ je konvergentní. |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ je konvergentní. | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot d_n)$ je konvergentní. |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n + l \cdot b_n)$, kde $k, l \in \mathbb{R}$, je kon- | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot d_n)$ je konvergentní. |

Příklad 4 (Zkouškové příklady). Vyšetřete konvergenci následujících řad:

- | | |
|---|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} z^n, \quad z \in \mathbb{R}$ | (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n^2)}{(n+1)^{n^2+1}}$ |
| (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$ | (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(2^{2^n} + 1)}{\log(2^{4^n} + 1)}$ |

